$U, W \leq V(\mathbb{K})$

$$U+W := \{\bar{u}+\bar{w} \mid \bar{u}\in U, \bar{w}\in W\}.$$

oss: 1) $U+W \leq V(\mathbb{K})$

$(\bar{u}+\bar{w}), (\bar{u}'+\bar{w}') \in U+W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \alpha(\bar{u}+\bar{w}) + \beta(\bar{u}'+\bar{w}') = \underbrace{(\alpha\bar{u}+\beta\bar{u}')}_{\in U} + \underbrace{(\alpha\bar{w}+\beta\bar{w}')}_{\in W} = \bar{u}''+\bar{w}'' \in U+W.$

2) $U+W = \mathcal{L}(U \cup W)$

Infatti se $X \leq V$ e $U \subseteq X, W \subseteq X \Rightarrow \forall \bar{u}\in U \ \forall \bar{w}\in W$

$\bar{u}+\bar{w} \in X \Rightarrow U+W \subseteq X$

$\Rightarrow U+W = \mathcal{L}(U+W)$.

□

Teorema: (Formula di Grassmann)

$$\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

DIM: Sia $U \times W = \{(\bar{u}, \bar{w}) : \bar{u} \in U, \bar{w} \in W\}$.

$\Rightarrow$ $U \times W$ è uno sp. vettoriale di dimensione

$$\dim (U \times W) = \dim U + \dim W.$$

Se $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$ base di U

$\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_s)$ base di W $\Rightarrow$

$$\{(\bar{e}_i, 0) \quad i = 1 \dots k\} \cup \{(0, \bar{e}'_j) \mid j = 1 \dots s\}.$$

è una base di $U \times W$.

$$\sum \alpha_i (\bar{e}_i, \underline{0}) + \sum \beta_j (\underline{0}, \bar{e}'_j) = (\underline{0}, \underline{0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum \alpha_i \bar{e}_i , \sum \beta_j \bar{e}'_j \right) = (\underline{0}, \underline{0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum \alpha_i \bar{e}_i = \underline{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$$

$$\sum \beta_j \bar{e}'_j = \underline{0} \Rightarrow \beta_j = 0 \ \forall j$$

$\Rightarrow$ l'unica c. lineare che dà $\underline{0}$ è a coeff. tutti nulli.

$\forall (\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W \quad \exists \alpha_1 \dots \alpha_K \in \mathbb{K} : \bar{u} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_K \bar{e}_K$

$\exists \beta_1 \dots \beta_S \in \mathbb{K} : \bar{s} = \beta_1 \bar{e}'_1 \dots + \beta_S \bar{e}'_S$

$$\Rightarrow (\bar{u}, \bar{w}) = \sum \alpha_i (\bar{e}_i, \underline{0}) + \sum \beta_j (\underline{0}, \bar{e}'_j)$$

→ $\dim \quad U \times W = \dim U + \dim W.$

→ $\dim \quad U + W = ?$

consideriamo una funzione lineare

$$\Theta : \begin{cases} U \times W \to U + W \\ (\bar{u}, \bar{w}) \to \bar{u} + \bar{w} \end{cases} \quad \text{è suriettiva.}$$

$$\dim \mathrm{Im}(\Theta) = \dim U + W$$

$$\dim \mathrm{Null}(\Theta) + \mathrm{rk}(\Theta) = \dim U + \dim W$$

$$\boxed{\mathrm{Null}(\Theta) + \dim(U+W) = \dim U + \dim W.}$$

$$\text{Null}(\theta) = \dim \ker \theta$$

$$\ker \theta = \{(\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W \mid \bar{u} + \bar{w} = \bar{0}\} =$$

$$= \{(\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W \mid \bar{u} = -\bar{w}\} =$$

$$= \{(\bar{u}, -\bar{u}) \in U \times W \mid \bar{u} \in U, -\bar{u} \in W\} =$$

$$= \{(\bar{u}, -\bar{u}) \mid \bar{u} \in U, \bar{u} \in W\} =$$

$$= \{(\bar{u}, -\bar{u}) \mid \bar{u} \in U \cap W\} \cong U \cap W$$

$$\dim \ker(\theta) = \dim (U \cap W)$$

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$$

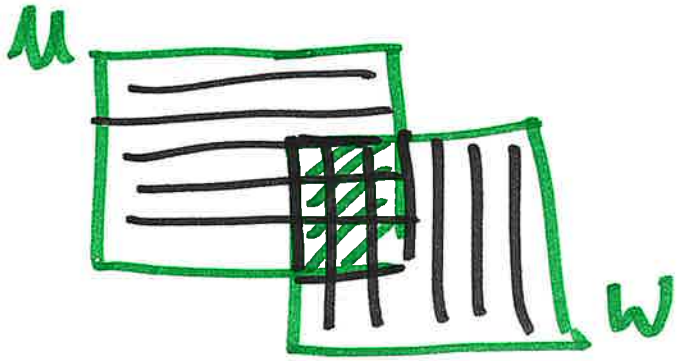
□

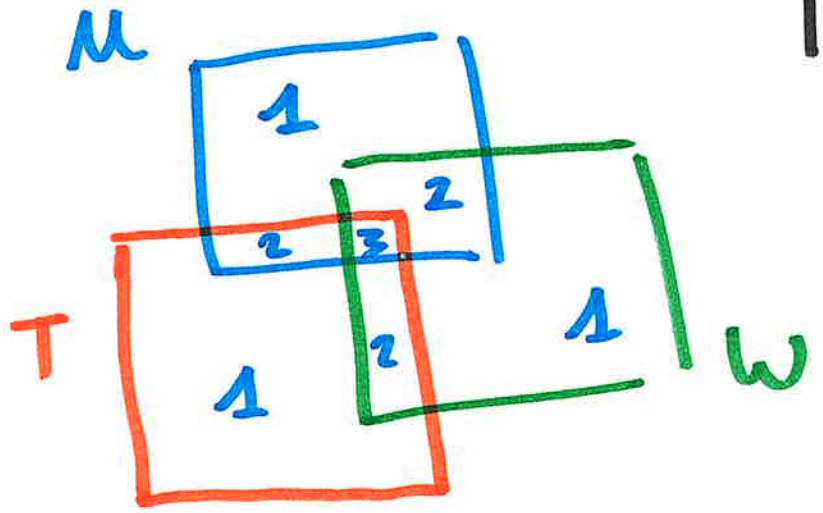
$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Insiemi:

$$|U \cup W| = |U| + |W| - |U \cap W|$$

principio di inclusione/esclusione





$$|U \cup W \cup T| =$$
$$= |U| + |W| + |T| -$$
$$|U \cap W| - |T \cap W| -$$
$$|U \cap T| + |T \cap U \cap W|$$

oss: Cosa succede se $\text{Null}(\theta) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad U \times W \cong U + W$$

perché $\ker \theta = \{0\}$ e $\text{Im}\,\theta = U + W$.

In questo caso si dice che la somma di U e W è diretta e si scrive

$$U \oplus W$$

Teorema: siano $U, W \leq V(\mathbb{K})$ allora i equivalente

1) $U \oplus W$
2) $\dim U \cap W = 0$ cioè $U \cap W = \{0\}$.
3) $\dim U + W = \dim U + \dim W$

4) ogni vettore di $U+W$ si scrive in modo unico come c. lineare di un vettore di U ed uno di W

5) l'unione di una base di U ed una base di W è una base di $U+W$.

DIM: 1) $U \oplus W \iff \ker(\theta) = \{\underline{0}\} \iff \dim \ker \theta = 0$

$\iff \dim U \cap W = 0 \iff (2)$

$\iff \dim U+W = \dim U + \dim W - \dim \ker \theta$

$= \dim U + \dim W \iff (3)$.

(2) $U \cap W = \{0\} \iff \ker \theta = \{\underline{0}\} \iff \theta$ è una applicazione iniettiva $U \times W \to U+W$

$\iff$ ogni elemento $\bar{u}+\bar{w} \in U+W$ ha un'unica

preimmagine in $U \times W$ cioè

$\exists! \bar{u} \in U \; \exists! \bar{w} \in W : \bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \iff (*)$.

5) OSSERVIAMO CHE ~~[illegible]~~ se

$\mathcal{B}_U = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_k)$ e $\mathcal{B}_W = (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_s)$

$\Rightarrow$ Data una c. lineare

$(\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_k \bar{u}_k, \beta_1 \bar{w}_1 \dots \beta_s \bar{w}_s)$

$\in U \times W$ questa viene mandata in

$\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_k \bar{u}_k + \beta_1 \bar{w}_1 - \dots + \beta_s \bar{w}_s$

e tale combinazione lineare è $\underline{0}$

$\iff (\alpha_1 \bar{u}_1 \dots + \alpha_k \bar{u}_k, \beta_1 \bar{w}_1 \dots \beta_s \bar{w}_s) \in$

$\ker \theta$.

ma se $\ker \Theta = \{(0,0)\}$ questo

implica che $\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_k \bar{u}_k = 0$

$\beta_1 \bar{w}_1 + \dots + \beta_n \bar{w}_n = 0$

con $(\bar{u}_1 \dots \bar{u}_k)$ e $(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n)$ liberi

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$

(1) $\Leftrightarrow$ l'unione delle basi di U e W è libera $\Leftrightarrow$ l'unione delle basi di U e W è base di $U+W$.

l'unione delle basi di U e W è libera

$\Rightarrow$ l'unica preimmagine di 0 è $(0,0)$

in quanto essa è lineare se così non fosse esisterebbero

$(\alpha_2 \dots \alpha_k), (\beta_2 \dots \beta_n)$:

$\theta(\alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_k \bar{e}_k, \beta_2 \bar{e}_1' \dots + \beta_n \bar{e}_n') =$

$= \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_n \bar{e}_n' = 0$

con non tutti gli (α_i) e (β_j) uguali a zero $\Rightarrow$ $\Rightarrow \ker \theta = \{(0,0)\}$

$\Rightarrow U \oplus W$ □

Somma diretta di 2 sottospazi $\Leftrightarrow$

$U \cap W = \{0\}$ ⊥

Cosa vuol dire che $M_1, M_2 \dots, M_k$ come sottospazi sono in somma diretta?

DEF) $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k \iff (M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k) \cong$
$\cong M_1 + M_2 + \dots + M_k$

EQ.) $\dim (M_1 + \dots + M_k) = \dim M_1 + \dots + \dim M_k$

EQ.) l'unione di basi $B_{v_1} \dots B_{v_k}$ è base di
$M_1 + \dots M_k$

Eg.) Ogni vettore di $U_1 + U_2 + \dots + U_K$
si scrive in modo unico come somma
di vettori di $U_1, U_2 \dots U_K$

⚠ La condizione

$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_K = \{0\}$$

NON IMPLICA CHE $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_K$

⚠⚠ NON BASTA NEMMENO

$$U_i \cap U_j = \{0\} \qquad i \neq j$$

Es. in $\mathbb{R}^3$ $\quad U_1 = \langle \bar{e}_1 \rangle \quad U_2 = \langle \bar{e}_2 \rangle$

$$U_3 = \langle \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \rangle$$

$$U_1 = \{(\alpha\ 0\ 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$$U_2 = \{(0\ \beta\ 0) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$U_3 = \{(\alpha, \gamma, 0) : \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

$$U_1 + U_2 + U_3 = U_1 + U_2 = \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

$$U_3 \subseteq U_1 + U_2$$

$$\dim(U_1 + U_2 + U_3) = 2 \neq 3$$

$$U_1 \times U_2 \times U_3 = \{((\alpha\ 0\ 0), (0\ \beta\ 0), (\gamma\ \delta\ 0)) \mid \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

$$= L\left(\begin{matrix}(1\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0),\\ (0\ 0\ 0 & 1\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0)\\ (0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0 & 1\ 1\ 0)\end{matrix}\right)$$

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k \iff$$

$$\forall i \geq 2 : \quad (U_1 \oplus \dots \oplus U_{i-1}) \cap U_i = \{0\}.$$

CONSEGUENZE DELLA FORMULA DI GRASSMANN

$$\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$$

$$\left.\begin{array}{l} U \subseteq U+W \\ W \subseteq U+W \end{array}\right. \Rightarrow \max(\dim U, \dim W) \leq \dim U+W$$

$$\left.\begin{array}{l} U \cap W \subseteq U \\ U \cap W \subseteq W \end{array}\right. \Rightarrow \min(\dim U, \dim W) \geq \dim U \cap W$$

$U + W \leq V(k)$ $\qquad$ $\dim U + W \leq n$

$\dim U + W \leq \dim U + \dim W.$

$$\max(\dim U, \dim W) \leq \dim U + W \leq \min(n, \dim U + \dim W)$$

$$0 \leq \dim(U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W)$$

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$$

$$\geq \dim U + \dim W - \min(n, \dim U + \dim W).$$

$\Leftrightarrow \dim U + \dim W > n$

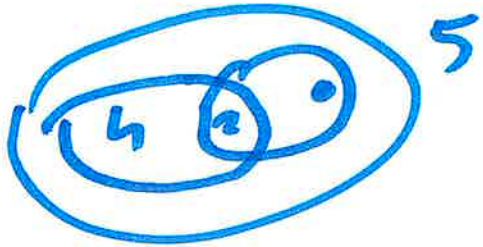
$\Rightarrow \dim U + \dim W - n > 0$

Siano X e Y due sottospazi di $\mathbb{R}^5$ di dimensioni rispettivamente 4 e 3

Quali sono le possibili dimensioni di $X \cap Y$?

$2 \leq \dim(X \cap Y) \leq 3$ $\qquad 3+4=7>5$

$\Rightarrow \quad \dim(X \cap Y) \geq 7-5=2$





$$4 \leq \dim(X+Y) \leq 5$$

Def: Sia $X \leq V(\mathbb{K})$. Si dice complemento diretto
$X \neq V(\mathbb{K})$

di X in $V(\mathbb{K})$ ogni sottospazio $Y \leq V(\mathbb{K})$
tale che $X \oplus Y = V(\mathbb{K})$

Se V f.g. costruiamo un completamento della base di una base di X ($\neq \{0\}$) a base di $V(\mathbb{K})$ e poniamo $Y = \mathcal{L}((\bar{e}_i \dots \bar{e}_n))$
ove $\bar{e}_i \dots \bar{e}_n$ sono i vettori che si sono

aggiungi alla base di X per ottenere una base di $V(\mathbb{K})$.

Se $X = \{0\} \Rightarrow$ un suo complemento è $V(\mathbb{K})$.

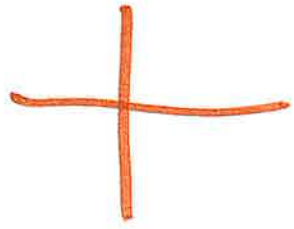
$\mathcal{B} = [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n]$ base di $V(\mathbb{K})$

e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot\cup \mathcal{B}_2 \dot\cup \dots \dot\cup \mathcal{B}_t$ ⊔

↑ unione disgiunta, cioè $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ per $i \neq j$

$\Rightarrow V = \mathcal{L}(\mathcal{B}_1) \oplus \mathcal{L}(\mathcal{B}_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{L}(\mathcal{B}_t)$

$\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}((1\,0)) \oplus \mathcal{L}((0\,1))$



$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}((001)) \oplus \mathcal{L}((020)) \oplus \mathcal{L}((021))$$

$$= \mathcal{L}((200), (020)) \oplus \mathcal{L}((01\text{-}1))$$

→ In $\mathbb{K}^n$ come si può fare a riconoscere delle basi

→ Come fare a riconoscere in $\mathbb{K}^{n,n}$ le matrici di cambiamento di base?

→ avere un modo per controllare se una seq. è libera in $\mathbb{K}^n$.

Seq. libere

1) Se una sequenza di vettori contiene $\underline{0}$
⇒ essa è legata.

$1 \cdot \underline{0} + 0 \cdot (\dots) = \underline{0}$
a coeff. non tutti 0.

2) Una sequenza è libera $\Leftrightarrow$ permutando i suoi vettori in qualunque modo ena è ancora libera.

Sia $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$

$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_j \dots \bar{v}_n)$ libera $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_j \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_n)$ libera.

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_i \bar{v}_i + \dots + \alpha_j \bar{v}_j + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_j \bar{v}_j + \dots \alpha_i \bar{v}_i + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 \bar{v}_1 + \dots \beta_i \bar{v}_j + \dots + \beta_j \bar{v}_i + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \bar{0} \Leftrightarrow \beta_1 = \dots \beta_n = 0$$

3) Se una seq. contiene 2 vettori identici
⇒ essa è legata

$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_j \dots \bar{v}_n)$ con $\bar{v}_i = \bar{v}_j \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{v}_i - \bar{v}_j = \underline{0}$

4) Se una seq. contiene 2 vettori proporzionali
⇒ essa è legata

$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_j \dots \bar{v}_n)$ con $\bar{v}_j = \alpha \bar{v}_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha\bar{v}_i - \bar{v}_j = \underline{0} \Rightarrow$

legata.

5) Supponiamo $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ legata ⇒ se sommiamo ad un vettore $\bar{v}_i$ una c. lineare dei rimanenti la seq. resta legata.

$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_n)$

$(\bar{v}_1 \dots \bar{w}_i \dots \bar{v}_n)$

con $\bar{w}_i = \bar{v}_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j \Rightarrow \bar{v}_i = \bar{w}_i - \sum \alpha_j v_j$

per ipotesi $\exists (\beta_1 \dots \beta_n) \neq \underline{0}$ tali che

$\beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \bar{v}_i + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \underline{0}$

$\Rightarrow \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i (\bar{w}_i - \sum \alpha_j v_j)$

$+ \dots + \beta_n \bar{v}_n = \underline{0}$

$\Rightarrow = (\beta_1 - \alpha_1 \beta_i) \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \bar{w}_i + \dots (\beta_n - \alpha_n \beta_n)$

$\bar{v}_n = \underline{0}$

$$(\beta_1 - \alpha_1\beta_i)\bar{v}_2 + \dots + \beta_i\bar{w}_i + \dots + (\beta_n - \alpha_n\beta_n)\bar{v}_n = 0$$

se $\beta_i = 0 \Rightarrow \beta_1\bar{v}_2 + \dots + \beta_n\bar{v}_n = 0$

ma $(\beta_2 \dots \beta_n) \neq 0$

$\Rightarrow$ la seq. è legata.

se $\beta_i \neq 0 \Rightarrow$ $\bar{w}_i$ compare con coeff. $\neq 0$

$\Rightarrow$ la seq. è legata. □

sia $(\bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$ una seq. libera $\Rightarrow$

la sequenza $(\bar{v}_2 \dots \bar{w}_i \dots \bar{v}_n)$ ove

$\bar{w}_i$ sostituisce il vettore $\bar{v}_i$ con

una c. lineare $\bar{w}_i = \bar{v}_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j$

è ancora libera.

$$\beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \bar{w}_i + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \bar{v}_i + \sum_{j \neq i} \beta_i \alpha_j \bar{v}_j + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

$$(\beta_1 + \beta_i \alpha_1) \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \bar{v}_i + \dots + (\beta_n + \beta_i \alpha_n) \bar{v}_n = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \beta_i = 0 \quad e \quad \beta_1 + \beta_i \alpha_1 = \beta_2 + \beta_i \alpha_2 = \dots =$$
$$= \beta_n + \beta_i \alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_i = \dots \beta_n = 0.$$

□

Una sequenza $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ è libera $\Leftrightarrow$ sostituendo ad un suo qualsiasi vettore la somma

dello stesso con una c. lineare dei vettori si ottiene ancora una sequenza libera.

6) Sia $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_n)$ libera $\Leftrightarrow$ $\forall a \neq 0$ $\forall i$

$(\bar{v}_1 \dots a_i \bar{v}_i \dots \bar{v}_n)$ libera.

Una sequenza è libera $\Leftrightarrow$ moltiplicare per uno scalare $\neq 0$ un suo qualsiasi vettore lascia la seq. libera.

In

In particolare: $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ è libera se e solamente se applicare le seguenti operazioni un numero finito di volte fornisce ancora una sequenza libera

1) Scambiare 2 vettori in S
2) Moltiplicare un vettore di S per $\alpha \neq 0$
3) Sostituire ad un vettore di S una sua combinazione lineare con gli altri vettori di S.